



TITLE:

# Graphs in $P^2$ -Containing 3-Manifolds

AUTHOR(S):

根上, 生也

---

CITATION:

根上, 生也. Graphs in  $P^2$ -Containing 3-Manifolds. 数理解析研究所講究録 1983, 487: 33-42

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103483>

RIGHT:

## Graphs in $P^2$ -Containing 3-Manifolds

東工大・理 根上生也 (Seiya Negami)

よく知られているように, 2つの  $P^2$ -irreducible, sufficiently large 3-manifold  $M^3$ ,  $N^3$  に対して

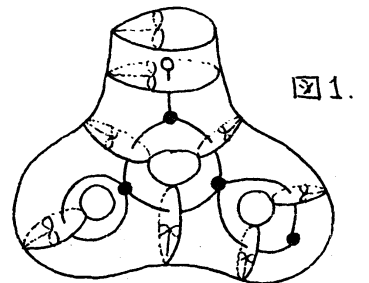
$$(M^3, \partial M^3) \underset{\text{homotopy equivalence}}{\sim} (N^3, \partial N^3) \Rightarrow M^3 \underset{\text{homeomorphic}}{\approx} N^3$$

が成立する。" $P^2$ -irreducible, sufficiently large" という仮定が  $M^3, N^3$  を aspherical にするので写像の変形が自由にできて上の事実が証明できるのだ。そこで, この仮定から " $P^2$ -" を除去したらどうなるかを考察するのが本稿の目的である。以後, 2-Sided な projective plane  $P^2$  を含む 3-manifold は  $P^2$ -containing であるということにする。 $P^2$ -containing, irreducible 3-manifolds に対して上の命題を証明するには Poincaré 予想と大きくかかわるので, そういう大それたことはやめて 3-manifold の homotopy 同値が  $P^2$  の入り方を記述する graph の同相を導くことを示す。また, その graph の応用として  $P^2$ -containing, irreducible, closed 3-manifolds の構造は  $P^2$ -irreducible closed 3-manifolds 内の knot theory に帰着されることを示す。

1.  $P^2$ -Graphs

3-Manifold  $M^3$  中の disjoint な 2 つの 2-sided projective plane  $P_0^2$ ,  $P_1^2$  が parallel であるというのは  $M^3$  内の  $P^2 \times I$  の embedding に対して  $P^2 \times \{t\} = P_t^2$  ( $t=0,1$ ) となるときである。  $M^3$  の内部の互いに交らない parallel でない 2-sided projective plane の極大な集合を complete system (of 2-sided projective planes in  $M^3$ ) と呼ぶ。  $M^3$  が compact ならば complete system は有限になる。 さらに,  $M^3$  が irreducible ならばそれは ambient isotopy のもとで一意的に決まるので, 次のように定義される graph  $G(M^3)$  は complete system の取り方によらずに  $M^3$  だけで定まる。

まず,  $M^3$  を complete system のすべての  $P^2$  で切り開いたときの各 component に対して 1 つずつ vertex を用意する。



特に  $M^3$  の境界上の  $P^2$  を含む component ( $\approx P^2 \times I$ ) に対しては 0, それ以外には  $\bullet$  を割りふる。次に 2 つの component が  $M^3$  の中で 1 枚の  $P^2$  をはさんで貼り合うときそれらに対応した vertex を edge で結ぶ。こうして構成された graph を irreducible 3-manifold  $M^3$  の  $P^2$ -graph と呼び,  $G(M^3)$  と記す。  $G(M^3)$  は  $M^3$  の中に各 edge がそれに対応した  $P^2$  と 1 点で交差するように埋蔵することができる。(図1.)

2つの 2-sided projective plane  $P_0^2, P_1^2 \subset M^3$  が  $P^2 \times I$  と homotopy 同値な  $M^3$  の submanifold  $Q^3$  に対して  $\partial Q^3 = P_0^2 \cup P_1^2$  となっているとき  $P_0^2$  と  $P_1^2$  は pseudo-parallel であるという。上の定義で “parallel” を “pseudo-parallel” に変えて, pseudo-complete system と pseudo- $P^2$ -graph  $\tilde{G}(M^3)$  を定義する。  $M^3$  が irreducible であるうとも pseudo-complete system の存在は一意的でない可能性はあるが,  $\tilde{G}(M^3)$  の graph としてのタイプは一意的に定まる。  $G(M^3)$  と  $\tilde{G}(M^3)$  は位相空間として見れば同相であるが, pseudo-complete system と complete system の間に差があれば  $G(M^3)$  は  $\tilde{G}(M^3)$  の細分になり graph としてのタイプは異なる。もしも Poincaré 予想が正しければ  $Q^3 (\sim P^2 \times I)$  は実際に  $P^2 \times I$  と同相になるので, parallel と pseudo-parallel の差がなくなり  $G(M^3)$  と  $\tilde{G}(M^3)$  は同じものになることも注意しておこう。

定理 1. 2つの  $P^2$ -containing, irreducible 3-manifold  $M^3, N^3$  に対して  $(M^3, \partial M^3) \sim (N^3, \partial N^3)$  ならば  $\tilde{G}(M^3)$  と  $\tilde{G}(N^3)$  は graph として同型である。

$\tilde{G}(M^3) \approx G(M^3)$  であるからこの定理により初めに述べた事実と見掛け上似ている結論を得る：

$$(M^3, \partial M^3) \sim (N^3, \partial N^3) \Rightarrow G(M^3) \approx G(N^3).$$

定理 1 の証明の Outline: 基本的には  $P^2$  irreducible, sufficiently large 3-manifold のときのまねをする。ただし hierarchy の代りに pseudo-complete system を使う。  $f: (M^3, \partial M^3) \rightarrow (N^3, \partial N^3)$  を homotopy 同値写像,  $\mathcal{P} \subset N^3$  を  $N^3$  の pseudo-complete system とする。  $f^{-1}(\mathcal{P})$  は  $M^3$  の中の 2-sided closed surface の system になると仮定してよい。もしその中に compressible な surface があれば compressing disk に沿った surgery で得られた surface が  $\mathcal{P}$  の中に送られるように  $f$  を修正する。しかし  $\pi_1(N^3) \neq 0$  なので  $f$  を  $M^3$  全体からの写像として修正するのは困難である。そこでそれを断念して  $f$  を  $M^3$  から何個かの ball を除去したものからの写像にしてしまう。この修正をくり返していくと、最終的には

$$\exists g: (M^3 - \text{balls}, \partial M^3) \rightarrow (N^3, \partial N^3)$$

s.t. (i)  $g_*: \pi_1(M^3 - \text{balls}) \rightarrow \pi_1(N^3)$  は同型写像.

(ii)  $g^{-1}(\mathcal{P})$  は pseudo-complete system  $\mathcal{P}'$  in  $M^3$ .

さらに (i) の性質から  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{P}'$  の間に 1 対 1 対応があることがわかり  $\mathcal{G}(M^3)$  と  $\mathcal{G}(N^3)$  が同型になる。■

$G(\cdot)$  がどの程度の invariant なのかは次の定理が示している。

定理 2. (i) いくつかの "0" が指定された任意の connected graph  $G$  に対して無限個の異なる irreducible,  $\partial$ -irreducible 3-

manifold  $M^3$  で  $G(M^3)$  が  $G$  と同型になるものが存在する。

(ii)  $M^3$  が closed ならば  $G(M^3)$  は eulerian である。

(iii) 任意の eulerian graph  $G$  に対して無限個の異なる closed, irreducible 3-manifold  $M^3$  で  $G(M^3)$  が  $G$  と同型になるものが存在する。

ここで eulerian graph とは connected graph で各 vertex の次数 (それに接続する edge の個数) が偶数のものである。よく知られているように, そのような graph は一筆描きが可能である。

定理 2 の証明の Outline: 右図は  $P^2 \times I$  に穴を掘って得られる 3-manifold  $R(n)$  を示している。この  $R(n)$  は irreducible で 2-irreducible であり  $\dot{R}(n)$  内の 2-sided projective plane はすべて底の境界成分の

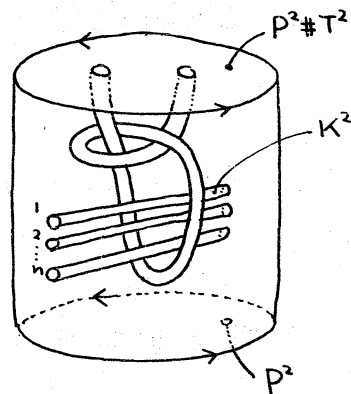
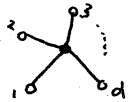


図 2.

$P^2$  と parallel になっている。したがって  $G(R(n)) = \bigcup$  である。

そこで  $R(n)$  を  $d$  個用意して境界の Klein bottle に沿って適当に貼り合せると  $P^2$ -graph が  になる irreducible, 2-irreducible 3-manifold が構成できる。特に  $d$  が偶数のときは  $n$  を調節して境界の Klein bottle どうし,  $P^2 \# T^2$  どうしを貼り合せて境界がちょうど  $d$  個の projective plane だけからなる 3-manifold が得られる。

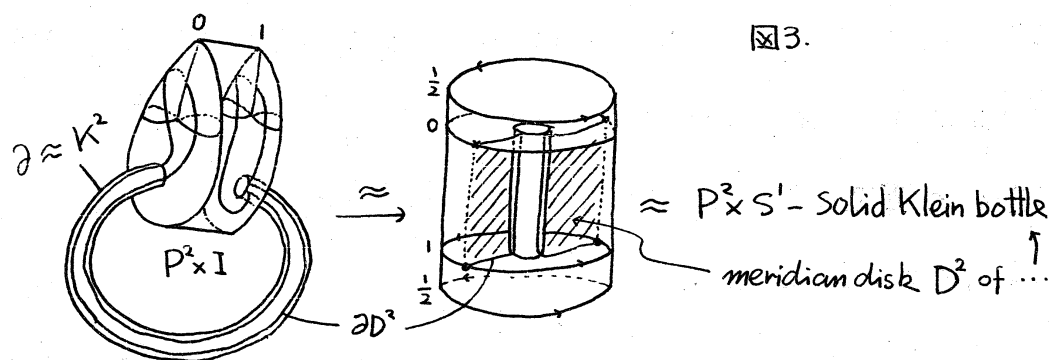
graph  $G$  の次数が  $d$  の各 vertex に対してこの 3-manifold を用意して境界の projective plane どうしを適当に貼り合せば (i)(ii) が主張している  $M^3$  が構成できる。さらに  $n$  を動かして  $M^3$  内の 2-sided incompressible Klein bottle の個数をふやしてやれば無限個の異なる  $M^3$  が得られる。(ii) は compact 3-manifold  $N^3$  に対して  $\chi(N^3) = \frac{1}{2} \chi(\partial N^3)$  ( $\chi(\cdot)$  はオイラー数) が成立することから導かれる。 $\chi(P^2) = 1$  なので closed 3-manifold  $M^3$  を complete system で切り開いたときの各連結成分  $N^3$  の境界が偶数個の projective plane から成っていないと  $\chi(N^3)$  が整数にならない。これから  $G(M^3)$  は eulerian になる。■

## 2. Klein bottle sum と Dehn surgery

定理 2 が示すように  $G(\cdot)$  はあまり強力な invariant ではないが、以下で見るように  $P^2$ -containing 3-manifold の構造を理解する 1 つの目安にはなるだろう。

$M^3$  を closed 3-manifold,  $K^2$  を  $M^3$  内の 2-sided separating Klein bottle とする。 $M^3$  を  $K^2$  に沿って切断して得られる 2 つの成分を  $M_1', M_2'$  としそれぞれの境界の Klein bottle に solid Klein bottle を貼り合せて得られる closed 3-manifold を  $M_1, M_2$  とする。このとき,  $M^3$  の  $M_1, M_2$  への分解を Klein bottle sum 分解 と呼び  $M^3 = M_1 \otimes M_2$  と記

す。solid Klein bottle の境界上の同相写像が内部まで拡張できるという事実から、 $M_1$  と  $M_2$  の同相型は  $K^2$  だけに依存して決まる。逆に  $M_1$  と  $M_2$  のそれぞれから solid Klein bottle を除去して  $M'_1$  と  $M'_2$  を作りそれらの境界どうしを貼り合せて  $M^3$  を構成しても貼り合せの写像が一意的でないのので（実際は極めて少ないが） $M^3$  も一意的には定まらない。だから  $M^3 = M_1 \natural M_2$  は "sum" と見るよりも "分解" と考えるべきである。



さて、 $M^3$  を  $P^2$ -containing closed 3-manifold,  $P^2$  を  $M^3$  内の 2-sided projective plane としよう。定理 2 の (ii) と同様の議論から  $P^2$  は  $M^3$  を separate しないことがわかり、 $P^2$  と 1 点で横断的に交差する simple loop  $\alpha$  が存在する。 $P^2 \cap \alpha$  の  $M^3$  内の正則近傍の概形は上図のようで  $P^2 \times S^1$  から solid Klein bottle を除去したものに同相である。そこでその境界の Klein bottle を  $K^2$  とおけば、 $M^3$  は  $M^3 = M_1 \natural P^2 \times S^1$  という Klein bottle sum 分解を持つ。ホモロジーの計算から  $\dim H_1(M^3; \mathbb{Z}_2) = \dim H_1(M_1; \mathbb{Z}_2) + 1$  がわかるので、有限個の  $P^2 \times S^1$  に対して  $M^3 = M_1 \natural P^2 \times S^1 \natural \dots \natural P^2 \times S^1$  となり  $M_1$  を  $P^2$ -containing



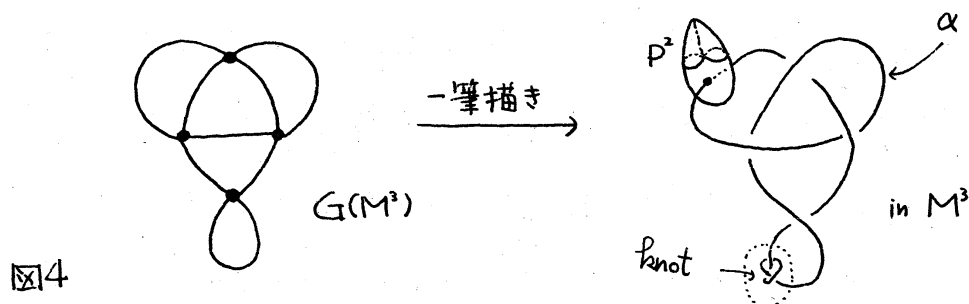
でなくすことができる。が、実は  $K^2$  をうまくとるとその  $P^2 \times S^1$  は 1 個だけでよい。

定理 3. 任意の  $P^2$ -containing, irreducible, closed 3-manifold  $M^3$  に対して  $P^2$ -irreducible closed 3-manifold  $M_1$  が存在して

$$M^3 = M_1 \natural P^2 \times S^1$$

となる。

証明: 定理 2 の (ii) により  $G(M^3)$  は eulerian なので一筆描きができることに着目する。 $G(M^3)$  を  $M^3$  に自然に埋蔵してその一筆描きの筆跡に従って  $M^3$  の中に simple loop  $\alpha$  をとる。特に  $\alpha$  が orientation-preserving になるようにする。 $\alpha$  は 1 つの  $M^3$  の complete system のすべての 2-sided projective plane を貫いているので  $\alpha$  からはずれたところには 2-sided projective plane はない。これから  $M^3$  から complete system の 1 枚の projective plane  $P^2 \times \alpha$  の和の正則近傍  $\mathcal{U}(P^2 \cup \alpha)$  を除去したものを  $M_1'$  とすれば  $M_1'$  は 2-sided projective plane を含まない。さらに  $M^3$  が irreducible だから  $M_1'$  は  $P^2$ -irreducible になる。



$M_1'$  の境界に solid Klein bottle  $V$  を貼り合せて得られる closed 3-manifold を  $M_1 = M_1' \cup V$  とすると  $M^3 = M_1 \cup P^2 \times S^1$  となる。ここまでの仮定ではもし  $M_1$  が  $P^2$ -irreducible でなければ  $M_1$  は 2-sided projective plane が ball を bound しないう 2-sphere で  $V$  とその交りが  $V$  のいくつかの meridian disk であるものが存在する。そこで  $\alpha$  に局所的な結び目を作る。特にその結び目を  $S^3$  の中のものと考えたときの knot complement が incompressible,  $\partial$ -incompressible planar surface を含まないようにする。たとえば, torus knot を除いたほとんどの 2-bridge knot がそのようなものであることが Hatcher-Thurston によって示されている。このとき図 3 を見ればわかるように  $V$  の meridian disk の境界は  $\alpha$  の結び目の部分を通過する。一方, 2-sided projective plane または 2-sphere が  $V$  と meridian disk で交れば  $\alpha$  の結び目の部分の近傍 -  $V$  とは planar surface で交らざるを得ない。これは  $\alpha$  に作った結び目の仮定に矛盾することになる。したがって,  $M_1$  は  $P^2$ -irreducible になる。■

定理 4. 任意の  $P^2$ -containing, irreducible, closed 3-manifold  $M^3$  に対して  $D^2 \times S^1$  を正則近傍にもつ  $M^3$  内の結び目  $\alpha$  が存在して自明でないすべての  $\alpha$  に沿った Dehn surgery によって  $P^2$ -irreducible closed 3-manifold が与えられる。

証明:  $\bar{K}$  として定理3の証明の結び目付きの  $\alpha$  をとる。同様の議論により,  $\bar{K}$  に沿った Dehn surgery の surgery instruction が  $\alpha$  の結び目の部分を通過する限り, 即ちその Dehn surgery が自明でない限り, surgery の結果得られる 3-manifold  $M_1$  が含む 2-sided projective plane も incompressible 2-sphere も  $\alpha$  の近傍とは交れない。これは  $\alpha$  のとり方と  $M^3$  が irreducible であることから  $M_1$  が  $P^2$ -irreducible であることを意味している。■

上の2つの定理により  $P^2$ -containing, irreducible, closed 3-manifold  $M^3$  は  $P^2$ -irreducible closed 3-manifold  $M_1$  とその中の結び目  $\bar{K}$  の組に置き換えられた。特に  $\bar{K}$  が orientation-reversing のとき定理3に, orientation-preserving のとき定理4に対応している。しかしながら,  $M_1$  が解析しやすいものになる保証がない。そこで, 任意の closed non-orientable 3-manifold が  $S^2 \otimes S'$  (= non-trivial  $S^2$ -bundle over  $S'$ ) から link に沿った Dehn surgery で与えられるという事実の類推として次の問題を提起して本稿を閉じよう。

問題: 任意の  $P^2$ -containing, irreducible, closed 3-manifold  $M^3$  は Klein bottle sum 分解  $M^3 = S^2 \otimes S' \natural P^2 \times S'$  を持つか?

以上